

## UN ESTUDIO ACERCA DE LOS SIGNIFICADOS DEL SIGNO DE IGUAL EN LA ENTRADA AL ÁLGEBRA

Sebastián Parodi – Cristina Ochoviet

parodiseb@gmail.com – cristinaochoviet@gmail.com

Consejo de Educación Secundaria, Uruguay – Consejo de Formación en Educación,  
Uruguay

Tema: Investigación didáctica

Modalidad: Conferencia Regular

Nivel educativo: Medio (11 a 17 años)

Palabras clave: signo de igual, similitudes y diferencias, práctica de indagación

### Resumen

*Presentamos una investigación que indaga los significados que le atribuyen al signo de igual, en un contexto algebraico, un grupo de estudiantes que está terminando de cursar el segundo año del Ciclo Básico de Enseñanza Secundaria (13-14 años), en un liceo de la ciudad de Montevideo. Realizamos un estudio de casos en primera persona que incluyó la aplicación de un cuestionario, la realización de una serie de entrevistas y el desarrollo de dos sesiones de trabajo con el grupo. Los resultados de este estudio ponen de manifiesto la existencia de una relación dialéctica entre la comprensión del signo de igual y el trabajo con este signo en contexto algebraico, en el sentido de que la comprensión del signo de igual no es algo que antecede el estudio de las ecuaciones y el álgebra lineal, sino que por el contrario, el estudio del álgebra fortalece esta comprensión y su funcionamiento en los diferentes contextos.*

### Introducción

Varios estudios reportan ciertas dificultades de los estudiantes relacionados con la comprensión del signo de igual. En Burgell (2012), por ejemplo, se realiza un estudio de casos con estudiantes y profesores de primer año de enseñanza secundaria de Uruguay, donde se aplica un cuestionario, se desarrollan entrevistas y se analizan los enfoques de enseñanza. Los resultados de ese estudio muestran que en un contexto principalmente aritmético, “una parte importante de los alumnos interpretan el signo de *igual* como el indicador del resultado de una operación y no como el indicador de una *relación de equivalencia*, interpretación que resulta imprescindible para el abordaje del álgebra” (p. vii). Asimismo, que los docentes no le brindan al tema una atención especial.

En Parodi (2016) avanzamos un año más en el nivel escolar, trabajando con estudiantes diferentes pero insertos en el mismo sistema escolar que los de ese estudio. Los alumnos

con los que trabajamos ya estudiaron ecuaciones, operaciones con polinomios y funciones, a diferencia de los estudiantes que participaron de Burgell (2012) quienes aún no lo habían hecho. En este documento presentamos algunos resultados del estudio realizado, relativos a qué significados le atribuyen al signo de *igual*, en un contexto algebraico, un grupo de estudiantes de segundo año de Enseñanza Secundaria (13-14 años) que acaba de ingresar al estudio del álgebra, en un liceo de la ciudad de Montevideo.

### **Marco teórico**

Varios autores (Behr et al., 1976; Kieran, 1981; Knuth et al, 2011) distinguen dos maneras de entender el signo de igual: la operacional y la relacional. La comprensión operacional se da cuando el signo de igual es interpretado como el indicador del resultado de una operación o como una señal de hacer algo, mientras que la comprensión relacional refiere a que el signo de igual es interpretado como el indicador de una relación de equivalencia. Complementamos esta perspectiva con la clasificación de los significados y usos del signo de igual en contexto escolar de Molina (2006) y Molina et al. (2009).

### **Método**

Aplicamos un cuestionario a 26 estudiantes de 13-14 años con dieciséis preguntas planteadas en un contexto aritmético o en un contexto algebraico de ecuaciones y operaciones con polinomios, y realizamos cinco entrevistas para profundizar en sus respuestas al cuestionario. Asimismo, desarrollamos dos sesiones de trabajo con todo el grupo para recabar más información en relación a la temática abordada. Presentamos a continuación algunos resultados obtenidos mediante la aplicación del cuestionario.

### **Análisis de las respuestas al cuestionario**

En Parodi (2016) presentamos todas las respuestas al cuestionario de cinco estudiantes. Luego, analizamos dichas respuestas a la luz del marco teórico en pos de cumplir con el

objetivo que nos habíamos propuesto. En este documento presentamos y analizamos algunas de las respuestas al cuestionario presentadas por dos de estos cinco estudiantes.

i) El caso de Sebastián.

En la pregunta 1)a) del cuestionario, por ejemplo, Sebastián completa el espacio vacío de la expresión  $18+6=\_\_+5$  con el número 24: “ $18+6=\underline{24}+5$ ”. En este caso, el estudiante está interpretando el signo de igual como *operador* o como *propuesta de actividad*, porque completa el espacio vacío con el resultado de la operación que está planteada a su izquierda. Asimismo, no reconoce como un problema que las expresiones aritméticas así obtenidas no sean equivalentes:  $18+6$  y  $24+5$ . Aquí, Sebastián no logra interpretar el signo de igual como *expresión de una equivalencia numérica*, aun cuando es necesario para responder con acierto a la pregunta planteada.

En un contexto de ecuaciones, las respuestas al cuestionario presentadas por Sebastián dejan entrever una interpretación del signo de igual que es predominantemente operacional. En la pregunta 6, por ejemplo, que se indaga a los estudiantes sobre el significado que tiene para ellos el signo de igual en la expresión  $x+3=3x+5$ , Sebastián responde que en ese caso “significa que  $x+3$  da como resultado  $3x+5$ ”. Observamos que el estudiante interpreta el signo de igual como un operador, aún en el contexto de una ecuación, porque entiende que a la derecha de este signo se encuentra el resultado de una operación que está escrita a su izquierda. En otras palabras, él no logra interpretar el signo de *igual* como *expresión de una equivalencia condicional*, que era el significado esperado en esta pregunta, ni de cualquier otro modo que implique una lectura bidireccional del signo de igual (por ejemplo, como *expresión de una equivalencia simbólica*).

En las preguntas 5 y 9 del cuestionario, mientras tanto, que se plantea una ecuación para que los estudiantes resuelvan e indiquen su solución, siendo la ubicación de la variable respecto al signo de igual la única diferencia sustancial entre ellas, Sebastián presenta las siguientes respuestas:

- 5) a) Resuelve la ecuación  $3x + 5 = 26$ . Explica cómo lo haces.

$$\begin{array}{rcl}
 3x + 5 & = & 26 \\
 -5 & \swarrow & \\
 3x & = & 21 \\
 \cdot 1/3 & \swarrow & \\
 x & = & 7
 \end{array}$$

Aquí nosotros queremos saber cuánto vale  $x$ . entonces yo fui como resolviendo la ecuación para poder averiguar cuánto es  $x$

b) La solución de la ecuación anterior es: 7

- 11) a) Resuelve la ecuación  $31 = 4x + 7$ . Explica cómo lo haces.

$$\begin{array}{rcl}
 4x + 7 & = & 31 \\
 -7 & \swarrow & \\
 4x & = & 24 \\
 \cdot 1/4 & \swarrow & \\
 x & = & 6
 \end{array}$$

Resolvi la ecuación, como que fui sacando números para poder obtener cuánto es  $x$

b) La solución de la ecuación anterior es: 6

El alumno intenta aplicar “el principio de la balanza” para resolver cada ecuación, obteniendo la solución esperada solamente en el caso de la pregunta 5. Observamos que Sebastián no logra dotar de sentido a la ecuación planteada en la pregunta 11 porque en ese caso la variable aparece solamente a la derecha del signo de igual, y ello no es compatible con la visión operacional del signo de *igual* que ha caracterizado la mayoría de sus respuestas al cuestionario.

En un contexto de operaciones con polinomios, las respuestas al cuestionario presentadas por Sebastián no muestran indicios de estar interpretando el signo de igual como *expresión de una equivalencia simbólica*, a excepción de la respuesta presentada en la pregunta 15)f), donde sostiene que la afirmación  $7x+2x=9x$  es verdadera porque “ $9x=9x$ ”. En este caso, a diferencia de otras respuestas presentadas por Sebastián en este mismo contexto, él no dice que la operación planteada a la izquierda del signo de igual,  $7x+2x$ , da como resultado la expresión planteada a la derecha,  $9x$ , que sería propio de una interpretación operacional del signo de igual. Por el contrario, escribe “ $9x=9x$ ” para indicar que al reducir términos semejantes se obtiene la misma expresión a cada lado del signo de *igual*, que es consistente con una interpretación relacional del signo de igual.



## ii) El caso de Gerónimo

En un contexto aritmético, Gerónimo presenta respuestas al cuestionario como la que sigue a continuación:

- 1) Completa con el número que falta en cada espacio. Si en algún caso piensas que hay más de una posibilidad, indícala. Explica todas tus respuestas.

a)  $18 + 6 = \underline{19} + 5$        $5 + x = 24$   
 $24 = 24$        $x = 19$

El estudiante plantea y resuelve la ecuación  $5+x=24$ , lo que le permite completar el espacio vacío con el número 19. Cuando Gerónimo plantea y resuelve dicha ecuación está utilizando el signo de igual como expresión de una equivalencia condicional, porque reconoce que el valor de la variable obtenido, es el que transforma dicha ecuación en una igualdad numérica. Asimismo, cuando completa el espacio vacío con un 19 y señala que de ese modo se obtiene el mismo número a cada lado del signo de igual, está interpretando el signo de igual como expresión de una equivalencia numérica, porque reconoce que en ese caso dicho signo está relacionando dos expresiones aritméticas que representan al mismo número. También observamos que al responder esta pregunta del cuestionario, Gerónimo experimenta una transición entre dos usos distintos del signo de igual. Nos referimos a que el uso como expresión de equivalencia condicional le permite interpretar mejor el uso como expresión de una equivalencia numérica, que es el uso esperado en esta pregunta.

En un contexto de ecuaciones, cuando Gerónimo es consultado sobre el significado que tiene el signo de igual en la expresión  $3x+5=x+3$  (pregunta 5 del cuestionario) responde que en ese caso significa “que ambos tienen el mismo valor numérico”. El alumno hace alusión a los dos miembros que conforman dicha ecuación, dejando entrever una interpretación *relacional* del signo de *igual* (entendiéndolo como expresión de una equivalencia), aunque no observamos que explicita la condicionalidad que caracteriza dicha equivalencia en el contexto de una ecuación.

Gerónimo resuelve e identifica la solución de las ecuaciones presentadas en las preguntas 5 y 11 del cuestionario. Utiliza el “principio de la balanza”, indicando la operación aplicada a ambos miembros en cada caso. Cuando la variable de la ecuación

aparece solo del lado derecho no siente la necesidad ni de invertir los miembros de lugar respecto al signo de igual, ni de cambiar una estrategia de resolución por otra.

En un contexto de polinomios, las respuestas al cuestionario presentadas por Gerónimo se caracterizan por interpretar el signo de igual como expresión de una equivalencia simbólica, puesto que en general realiza las simplificaciones correspondientes para luego comparar los polinomios obtenidos a cada lado del signo de *igual*, como sucede en la pregunta 15)c):

c) 
$$\overbrace{3x^2 + 4x^2}^{7x^2} = \overbrace{2x^2 + 5x^2}^{7x^2} \checkmark \checkmark$$

yo pe los sumo de  
ambos lados del " $=$ "  
den  $7x^2$ .

En otras palabras, el alumno resuelve las situaciones indagando si hay presencia de una *identidad estricta*, lo que deja al descubierto que acude a distintos usos del signo de igual en forma simultánea con el objetivo de dar respuesta a una situación problemática.

## Conclusiones

Los resultados de nuestro estudio ponen de manifiesto la existencia de una relación dialéctica entre la comprensión del signo de igual, y el trabajo con este signo en un contexto algebraico. Nos referimos a que la comprensión del signo de igual no se presenta como algo que antecede el estudio de las ecuaciones y los polinomios, en el sentido de que debería existir una comprensión relacional previa y acabada antes de que el alumno inicie sus estudios de álgebra, sino que el estudio del álgebra fortalece la comprensión del signo de igual y su funcionamiento en los diferentes contextos, abriendo un abanico de significados a incorporar. Un conocimiento relacional del signo de igual facilita la comprensión del trabajo con ecuaciones cuya variable aparece a ambos miembros (Knuth et. al, 2011), pero también es cierto que este trabajo con las ecuaciones alimenta la comprensión relacional del signo de igual. De acuerdo a lo observado, no se aprende primero la equivalencia numérica y luego se avanza hacia la equivalencia condicional, por ejemplo, sino que cada uso que surge permite comprender más en profundidad los usos que el estudiante ya está utilizando y los que ya había

estudiado previamente. Entonces, no podemos sostener que el estudiante va a comprender primero el significado relacional del signo de igual para luego adentrarse en el estudio de las ecuaciones, sino que el estudio de las ecuaciones va a abrir y alimentar la comprensión de nuevos usos así como el fortalecimiento de otros usos ya bien conocidos por el alumno. Es lo que decíamos, por ejemplo, cuando analizábamos la respuesta dada por Gerónimo a la pregunta 1)a) del cuestionario.

Reconocemos la tendencia de algunos estudiantes a utilizar el signo de *igual* en su carácter de *operador*, aún en el contexto de una ecuación, como es el caso de Sebastián. Esto da cuenta de la dificultad que implica para el docente de segundo año de enseñanza secundaria, impactar con otros usos del signo de *igual* que el estudiante comienza a ver en ese curso, cuando en realidad su historia previa en el sistema escolar está caracterizada por un uso primordialmente *operacional* del signo de *igual*. Sugerimos a los docentes explicitarles a sus estudiantes que el signo de igual se utiliza de diversas formas, y mantener una enseñanza a lo largo de la escolarización que enriquezca los distintos usos del signo de *igual* desde etapas tempranas, siendo este un tema abierto que futuras investigaciones podrán atender.

## Bibliografía

- Behr, M., Erlwanger, S., y Nichols, E. (1976). How children view equality sentences, Project for the Mathematical Development of Children. *ERIC Document Reproduction Services No. ED144802*.
- Burgell, F. (2012). *¿Qué significados atribuyen al signo de igual los estudiantes de primer año del Ciclo Básico de Enseñanza Media? Aportes para pensar los cimientos del álgebra* (Tesis de maestría no publicada). Universidad Nacional del Camahué. Neuquén, Argentina.
- Kieran, C. (1981). Concepts Associated with the Equality Symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12(3), 317-326.
- Knuth, E., Alibali, M., McNeil, N., Weinberg, A., y Stephens, A. (2011). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence y variable. En *Early algebraization* (pp. 259-276). Springer Berlin Heidelberg.
- Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria* (Tesis de doctorado no publicada). Universidad de Granada. Granada, España.
- Molina, M., Castro, E., y Castro, E. (2009). Elementary students understanding of the equal sign in number sentences. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 17(7 (1)), 341-368.

Parodi, S. (2016). *Significados del signo de igual en la entrada al álgebra: un estudio de casos con estudiantes de segundo año de enseñanza secundaria* (Tesis de maestría no publicada). CICATA- IPN, México.